collège MELKART

soyons à l'écoute

DEVOIRS DE VACANCES
ÉTÉ 2024

Classe de 2nde

Vers la Spécialité Mathématique de Première

Les devoirs de vacances proposés sont obligatoires pour certains élèves, et conseillés pour tous les autres, afin de consolider les acquis du travail effectué depuis le début de l'année.

Pour les élèves dont les devoirs sont obligatoires, il est impératif de les travailler sérieusement et les rendre complets, pour ne pas compromettre la prochaine année scolaire et faciliter l'adaptation à la classe supérieure.

Ils sont divisés en quatre parties :

- ***Travaux numériques et algébriques***
- ***Fonctions***
- ***Statistiques et probabilités***
- ***Travaux de géométrie (plane).***

Il est souhaitable que ces quatre parties soient travaillées en parallèle et que les chapitres concernés (indiqués au début de chaque partie) soient revus au fur et à mesure de l'avancement du travail !

Bonnes vacances à tous !

Partie I - TRAVAUX NUMERIQUES ET ALGEBRIQUES

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 1 (chap.1) : Nombres réels
Itinéraire 4 (chap.3) : Calcul littéral
Itinéraire 10 (chap.2) : Arithmétique

1. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a) Pour tout couple de réels non nuls, l'inverse d'un produit est le produit des inverses.
b) Pour tout couple de réels, le double d'un produit est le produit des doubles.
c) Pour tout couple de réels, le carré d'un produit est le produit des carrés.
d) Pour tout couple de réels, le carré d'une somme est la somme des carrés.

2. Simplifier :

$$A=\frac{(12{,}1)^{-2}\times(5{,}5)^3\times(-4)^6}{22^{-2}\times(0{,}5)^{-5}\times10^4}\ ;\quad B=\frac{\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^6\times\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^3\times\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{-3}}{16^{-1}\times\left(-\frac{4}{9}\right)^6\times3^4}\ ;\quad C=\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)^2\ ;\qquad E=\frac{3^{2n+1}-3^{2n-1}-9^n}{9^{n+2}+3^{2n+1}}$$

3. Soit $x=\sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{8}$ et $y=\sqrt{162}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$. Simplifier x et y.
Calculer $\frac{x+y}{2}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$ et $\sqrt{xy}$, puis classer ces nombres dans l'ordre croissant.

4. *Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence.*
a) Comparer $\frac{2x}{x^2+1}$ et $\frac{2x-1}{x^2}$ pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$. En déduire la comparaison, sans calcul, de $\frac{14}{50}$ et $\frac{13}{49}$.
b) Comparer $(x+1)$ et $(3-x^{-1})$ pour $x>0$.
c) Comparer $\frac{4x}{x+y}$ et $\frac{x+y}{y}$ pour $x>0$ et $y>0$.
d) Deux réels x et y sont tels que $0<y<x$. Comparer les réels $\frac{x}{y+1}$; $\frac{x+1}{y+1}$; $\frac{x}{y}$.
e) Quels sont les réels x dont l'inverse est inférieur à 1? Quels sont les réels x inférieurs à leurs inverses ? Quels sont les réels x inférieurs à leurs carrés ?

5. Comparer les réels suivants :
a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2-\sqrt{3}}$
c) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ et $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
d) $\frac{3}{1+10\sqrt{7}}$ et $\frac{3}{1+8\sqrt{11}}$

6. a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a<b$. Montrer que : $(a+b)^2>b^2+3a^2$.

7. Soit x et y deux réels strictement positifs. Démontrer que :

$$\frac{1}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2xy}\quad\text{et que}\quad\frac{x+y}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

8. Sachant que : $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$ et $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$, trouver un encadrement de :

* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; * $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$; * $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

9. a) Encadrer $f(x) = -3x + 9$, pour $x \in]-5\,;7[$.

b) On pose $y = 2x - 5$. Comment choisir x pour que $y \in]-1\,;2[$?

10. Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :
$A = 125 \times 9$; $B = 6 \times 49$; $C = 6 \times 121 \times 64$; $D = 45 \times 125 \times 9$.

11. Indiquer tous les diviseurs des nombres suivants, en s'aidant d'un arbre des diviseurs :
$M = 125 \times 9$; $N = 6 \times 49$; $P = 169 \times 121$; $Q = 49 \times 25$.

12. Ecrire sous forme irréductible les fractions :
$R = \frac{5 \times 49 \times 81}{63}$; $S = \frac{6 \times 5^2 \times 84}{125 \times 9 \times 144}$.

13. a) Montrer que si n est un entier pair, alors $4n + 3$ est impair.

b) Montrer que si n est un entier impair, alors $3n^2 + n$ est pair.

14. a) Sachant qu'un entier naturel impair s'écrit de la forme $2n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$, ou de la forme $2n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer en fonction de n, trois entiers naturels impairs consécutifs.

b) Montrer que la somme de trois entiers impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.

15. Factoriser : $A(x) = 16x + 4x^2 + 16$; $B(x) = 2(4x + 5)(2x - 5) + (3x + 7)(5 - 2x)$;
$C(x) = 25 - x^2 + 2(x - 5)(x + 3)$; $D(x) = (-x - 3)^2 + 3(x + 3)(2x - 1)$.

16. Réduire au même dénominateur, après avoir indiqué les valeurs interdites :
$E(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$; $F(x) = \frac{3x}{x-1} - \frac{3x-1}{x}$; $G(x) = \frac{x+2}{x-1} - \frac{x-1}{x+2}$

17. Résoudre :

a) $2x - \frac{3}{7} = \frac{x}{3} + \frac{2}{7}$ b) $(x-4)^2 = 5$ c) $3(11 - x)(3x + 4) = 5(11 - x)(x - 6)$

d) $\frac{x+1}{2x-4} = 0$ e) $\frac{x+3}{x-1} = 4$ f) $\frac{x^2 - 3x}{x+5} = 0$

g) $\frac{4}{3x-1} = \frac{3}{2x+5}$ h) $\frac{2}{x} = \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{x(x+1)}$

18. Résoudre :

a) $(x-2)(5-x) \geq 0$ b) $x(2x+1)(3-x) \leq 0$ c) $(x+3)^2 \leq (4-3x)^2$

d) $(x^2 - 9) \geq 2x(x-3)$ e) $x^3 < 4$ f) $\frac{5}{5-2x} > 0$ g) $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x}$

h) $\frac{x^2-9}{x^2-10x+25} \geq 0$ i) $\frac{x-3}{2-x} < 1$ j) $\frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{x+2}{2x+3}$ k) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} < \frac{1}{x^2}$

19. On pose $A(x) = (2x - 1)^2 - 3(2x - 1)(x + 2)$.

a) Développer et réduire $A(x)$; puis factoriser $A(x)$.

b) On pose $B(x) = \frac{x^2 - 49}{A(x)}$. Quel est l'ensemble de définition de B ? Simplifier $B(x)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $*$ $B(x) = 0$; $*$ $B(x) = 1$; $*$ $B(x) > 0$.

20. On pose $A(x) = x^2 - 8x$.

a) Factoriser $A(x)$ puis résoudre : $* \ A(x) = 0$; $* \ A(x) > 0$; $* \ A(x) < 0$.

b) Quel est l'ensemble des réels x pour lesquels les réels suivants existent :

$$B = \frac{1}{x^2 - 8x} \ ; \qquad C = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x}} ; \qquad D = \sqrt{x^2 - 8x} \ ; \qquad E = \sqrt{\frac{x}{x - 8}}$$

c) Pour $x \in \mathbb{R} - \{0\,;8\}$, simplifier :

$$F = \frac{x^2 - x}{x^2 - 8x} \ ; \qquad G = \frac{x - 8}{x} \times \frac{1}{x^2 - 8x} \ ; \qquad H = \frac{1}{x} - \frac{2}{x - 8} - \frac{2x - 8}{x^2 - 8x} .$$

21. a) Comment choisir la mesure du côté d'un carré si, en l'augmentant de 5, on obtient un autre carré dont l'aire vaut quatre fois celle du carré initial ?

b) ABCD est un carré de côté x ; on augmente AB de 8 et AD de 5; on obtient un rectangle dont l'aire surpasse celle du carré initial de 183. Calculer x.

c) ABCD est un carré de côté x ; MNPQ est un trapèze de bases 5 et 11, et de hauteur x. Comment choisir x (strictement positif) pour que: aire(ABCD) = aire(MNPQ)?

22. Un nombre palindrome est un nombre entier naturel que l'on peut lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, le nombre 22.
Existe-t-il des nombres palindromes premiers à deux chiffres ?

23. On donne $S = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.
Calculer : $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$. En déduire alors la valeur de S.

24. Valérie et Maria doivent parcourir chacune 30 km. Valérie met 3 heures de plus que Maria. Si Valérie double sa vitesse, elle mettra 2 heures de moins que Maria. Déterminer la vitesse de Valérie.

25. On dispose d'une somme de 205 €, constituée de x pièces de 10 €, y pièces de 5 € et z pièces de 2 €.
Il y a en tout 85 pièces. Démontrer que $8x + 3y = 35$.
Quelle est la valeur maximale de x ? Convient-elle ?
Déterminer le nombre de pièces de chaque catégorie.

26. Dans un musée on enregistre, dans une journée à tarif normal, une recette de 865 € pour 140 entrées adultes et 55 entrées enfants. Le lendemain, journée à tarif réduit, les prix d'entrée baissent de 25% pour les adultes et de 50% pour les enfants. On enregistre alors une recette de 705 € pour 180 entrées adultes et 20 entrées enfants. Quels sont les prix d'entrée à tarif normal pour les adultes et pour les enfants ?

27. ***Tutti - Frutti :*** Dix citrons coûtent autant que huit oranges, seize oranges autant que douze pamplemousses, quatre pamplemousses autant qu'un melon et six melons autant que quarante-huit bananes.
Pour le prix de cinq citrons, combien aurait-on de bananes ?

28. ***Dialogue au XIXᵉ siècle : «***

- Non, Monsieur, ma fille est trop jeune pour vous, vous avez trois fois son âge.
- Mais, si au lieu du triple, j'avais le double seulement ?
- Alors j'accepterais.
- Eh bien, j'attendrai. »

Le monsieur en question mourut à 63 ans, juste un an avant d'épouser cette personne.
Quel âge avait donc la fille au moment du dialogue ?

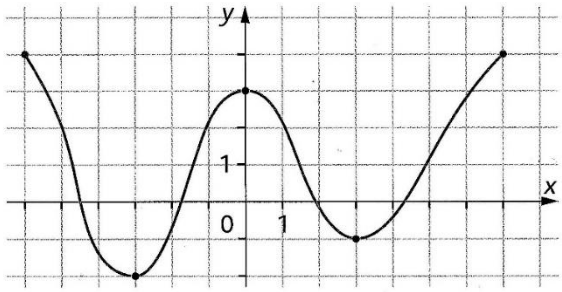
Partie II - FONCTIONS

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 5 (chap.7) : Fonctions de référence
Itinéraire 9 (chap.8) : Représentations graphiques
Itinéraire 11 (chap.9) : Variations et extremums

29. Soit f la fonction définie par sa courbe représentative ci-dessous.

a) Donner le domaine de définition de f.
b) Donner les images par la fonction f des réels -1 ; 0 et 5.
c) Donner les antécédents de 2 par la fonction f.
d) Dresser le tableau de variation de f.
e) Encadrer au mieux $f(x)$, lorsque $-1 \leq x \leq 7$
f) Résoudre graphiquement :
- $f(x) = 0$;
- $f(x) < 0$;
- $f(x) \geq 3$;
- $0 \leq f(x) \leq 2$.



30. Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = -x + 1$.
On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives.

a) Déterminer les images par f et g des nombres suivants : - 1 ; $\sqrt{3}$; 5 et $\frac{1}{5}$.
b) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
- La courbe C_f passe par le point (- 2 ; - 7) ;
- L'image de 0 par g est 1 ;
- $(\sqrt{2} - 1)$ est un antécédent de 0 par f.
- Les courbes C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses 0 et 3.

31. Dans chacun des cas suivants, il est demandé de donner l'expression de $f(x)$, d'en déduire les variations de f puis de tracer sa représentation graphique :

a) f est linéaire et $f(-3) = -4$.
b) f est affine, $f(0) = 6$ et $f(5) = 1$.
c) f est linéaire et sa représentation graphique passe par le point $E(-3\,;\ 5)$.
d) La courbe représentant f est la droite (HK) avec $H(1;\ 8)$ et $K(-1;\ -2)$.
e) f est affine et sa courbe représentative coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 7 et l'axe des abscisses au point d'abscisse -3.

32. On considère la fonction carré $f: x \mapsto x^2$.
Représenter graphiquement la fonction f et donner son tableau de variations.
En déduire le meilleur encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants :

a) $x \in [2; 5]$;
b) $x \in [-5; 3]$;
c) $x \in [-2; 5]$;
d) $x \in [-4; 3]$;
e) $1 \leq x \leq 6$;
f) $-20 \leq x \leq -10$;
g) $-5 \leq x \leq 3$;
h) $-8 \leq x \leq 8$.

33. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2 - 4$.

a) En utilisant une calculatrice graphique (ou le logiciel GeoGebra), construire dans un repère la représentation graphique de la fonction f.
b) Déterminer graphiquement les solutions de la double inéquation $-3 \leq f(x) \leq 0$.
c) Retrouver par le calcul les résultats de la question b).
d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq x - 3$.

34. On considère la fonction inverse $f: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Représenter graphiquement cette fonction et donner son tableau de variation.

En déduire le meilleur intervalle auquel appartient $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

a) $x \in]4; 5]$; b) $x \in [-4; -3[$; c) $x \in [1; +\infty[$; d) $x \in]-\infty; -2]$;
e) $3 \leq x \leq 5$; f) $-7 \leq x \leq -5$; g) $-1 \leq x \leq -0.5$; h) $1/2 \leq x \leq 2/3$.

35. Soit $g: x \mapsto \frac{1}{x-2}$.

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.
b) En utilisant une calculatrice graphique (ou le logiciel GeoGebra) donner le tableau de variation de f (on y montrera les variations sur chacun des intervalles où f est définie.
c) En déduire le meilleur encadrement de $g(x)$ lorsque $x \in [-5; -4]$.

36. On considère la fonction cube $f: x \mapsto x^3$.

a) Représenter graphiquement la fonction f et donner son tableau de variation.
b) En déduire le meilleur intervalle auquel appartient x^3 dans chacun des cas suivants :
$x \in]-3; -1]$; $x \in [-2; 5[$; $x \in [-1; +\infty[$; $x \in]-\infty; 2]$;

37. On considère la fonction $f: x \mapsto (x-1)^3 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) En utilisant une calculatrice graphique (ou le logiciel GeoGebra) donner le tableau de variation de f.
b) En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-3\,; 5]$.

38. On considère la fonction racine carrée $f: x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$.

a) Représenter graphiquement la fonction f et donner son tableau de variation.
b) En déduire le meilleur encadrement de $\sqrt{x}$ dans chacun des cas suivants :
$x \in]4\,; 64]$; $x \in [16\,; +\infty[$; $x \in [0\,; +\infty]$.

39. On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x-4} - 3$.

a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
b) En utilisant une calculatrice graphique (ou le logiciel GeoGebra) donner le tableau de variation de f.
c) En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [5\,; 20]$.

40. Julien a rédigé l'algorithme ci-contre, à l'aide du logiciel Python.

a) En entrant la valeur x = 2, quelle est la valeur affichée de y ?
b) Julien affirme que s'il augmente la valeur de x, celle de u diminuera. A-t-il raison ? justifier.
c) Quelle valeur de x faut-il saisir pour que l'affichage de y soit 3,4?

```
x = float(input("Donner x"))
y = x + 1
y = 2 / y
y = y + 3
print("y = ", y)
```

41. On considère l'algorithme ci-contre :

a) Faire fonctionner cet algorithme pour $x = -2$, $x = 0$ et $x = 1$.
b) Cet algorithme définit une fonction f.
  - Donner l'ensemble de définition de f.
  - Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
  - Représenter graphiquement la fonction f.

```
x = float(input("Donner x"))
if x < 0 :
    y = x**2
else :
    y = 2*x
print("y = ", y)
```

42. On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in [2; 1] \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x \in]1; 4] \end{cases}$

a) Construire un algorithme qui permette de calculer $f(x)$ en fonction de x.
b) Construire un tableau de valeurs avec le pas 0,5 puis construire la courbe représentative de f.

43. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x}{x-1}; \qquad k(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\ ; \qquad m(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-(x+1)^2}}\ ; \qquad n(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{1-x}}$$

44. ABCD est un carré de centre O et de côté 4 cm. P, Q, R, S sont les points des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] respectivement, tels que AP = BQ = CR = DS. On pose AP = x.

a) Montrer que le quadrilatère PQRS est un carré de centre O.
b) Calculer la longueur PQ en fonction de x. En déduire que l'aire $f(x)$ de PQRS s'écrit $f(x) = 2(x-2)^2 + 8$.
c) En utilisant une calculatrice graphique (ou le logiciel GeoGebra) représenter graphiquement la fonction f, puis donner son tableau de variation sur [0 ; 4].
d) Pour quelle valeur de x, l'aire $f(x)$ est-elle minimale ? Quelle est cette aire ?
e) Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $f(x) \leq 10$ sur l'intervalle [0 ; 4]. Préciser sur le côté [AB] du carré ABCD, les positions de P telles que l'aire du carré PQRS soit inférieure ou égale à 10 cm².

45. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 5x$.

a) Que peut-on dire de la parité de la fonction f ?
b) A l'aide d'une calculatrice graphique, ou du logiciel GeoGebra, représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, la fonction f.

46. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2+5}$.

a) Que peut-on dire de la parité de la fonction f ?
b) A l'aide d'une calculatrice graphique, ou du logiciel GeoGebra, représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, la fonction f.

47. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) A l'aide d'une calculatrice graphique, ou du logiciel GeoGebra, représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ la fonction f.
b) Dans le même repère, représenter graphiquement la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 2$.
c) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.
d) Montrer que pour tout réel x, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.
e) Retrouver alors, par le calcul et grâce à un tableau de signes, les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

48. Soit f et g les fonctions définies sur $[-3\,;3]$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 6$ et $g(x) = 2x^2 + 3x + 2$.

a) A l'aide d'une calculatrice graphique, ou du logiciel GeoGebra, représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ les fonctions f et g.
b) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > g(x)$.
c) Par le calcul, déterminer les coordonnées des points d'intersection des représentations graphiques des fonctions f et g.
d) Par le calcul, retrouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) > g(x)$.
En déduire la position relative sur $\mathbb{R}$ des courbes représentatives des fonctions f et g.

Partie III - STATISTIQUES & PROBABILITÉS

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 3 (chap.10) : Statistiques
Itinéraire 7 (chap.11) : Probabilités
Itinéraire 12 (chap.12) : Echantillonnage

49. Un lycée mixte de 1 200 élèves est composé d'élèves internes et d'élèves externes. Dans ce lycée on compte 540 garçons. 25% des garçons sont internes et 60% des filles sont internes.
a) Calculer le pourcentage de garçons dans le lycée.
b) Calculer le pourcentage de garçons internes dans le lycée ; de garçons externes ; de filles internes.
c) Calculer le pourcentage d'externes parmi les garçons ; de garçons parmi les internes.
d) Calculer le pourcentage d'internes dans le lycée.

50. a) Trouver le pourcentage d'évolution correspondant à une baisse de 40% suivie d'une augmentation de 45%.
b) Quelle hausse en pourcentage compense deux baisses successives de 15% ?
c) Le prix d'un article est de 2 500 €. En un an son prix augmente de 30%. Quelle baisse en pourcentage faut-il alors appliquer pour que son prix retombe à 2 800 € ?
d) Un commerçant achète un lot de 1000 CD. Il les revend en désirant faire un bénéfice de 20% sur le prix d'achat, sachant qu'il accorde une remise de 8% à ses clients les plus fidèles ; ceux-ci représentant 25% des ventes. De quel pourcentage doit-il majorer le prix d'achat ?

51. Une personne souhaite obtenir un capital de 12 000 € le 1er janvier 2016.
a) Calculer pour cela, à un euro près, la somme qu'elle doit placer le 1er janvier 2015 au taux de 1,75 %.
b) Calculer, à un euro près, la somme qu'elle doit placer le 1er janvier 2014 au taux de 1,75 %.

52. Un client souhaitant acheter des arbustes pour planter une haie se voit offrir deux propositions :
Première proposition : on lui offre 20 % d'arbustes en plus.
Deuxième proposition : on lui accorde une remise de 20 % sur le prix d'achat.
Quelle est la proposition la plus avantageuse ? *(Piste : comparer les prix unitaires)*

53. a) Calculer le taux d'évolution global résultant d'une baisse de 10 % suivie d'une augmentation de 20 %.
b) Soit t et t' deux taux d'évolution successives. Ecrire un algorithme permettant de calculer le taux d'évolution global résultant des deux évolutions successives de taux t et t'.
c) Programmer cet algorithme avec le logiciel Python, puis le tester sur l'exemple de la question a).

54. a) Calculer le taux d'évolution réciproque qui compense une baisse de 15 %.
b) Ecrire un algorithme permettant de calculer le taux d'évolution réciproque d'un taux t donné.
c) Programmer cet algorithme avec le logiciel Python, puis le tester sur l'exemple de la question a).

55. Au cours d'une course d'athlétisme (400 m), le temps réalisé par chacun des 15 coureurs a été chronométré.
Ces mesures sont :
48,65 ; 52,05 ; 49,20 ; 50 ; 52,60 ; 51,90 ; 50,45 ; 53,28 ; 50,13 ; 51,80 ; 51,85 ; 52,20 ; 51 ; 50,12 ; 49,17.
a) Déterminer la médiane de cette série, ainsi que les quartiles Q_1 et Q_3, puis construire le diagramme en boîte.
b) Calculer la moyenne et l'écart-type de la série. *(On pourra s'aider d'une calculatrice)*

56. Dans une classe de 28 élèves, la moyenne des notes des garçons est 10 et la moyenne des notes des filles est 12.
La moyenne générale de la classe est 11,5.
Quel est le nombre de garçons et de filles dans la classe ?

57. Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de maths par les 26 élèves d'une classe de 2^{nde} :

Notes	3	5	7	8	10	11	13	14	17
Effectifs	1	2	1	5	4	1	7	3	2

a) Reproduire le tableau et le compléter avec une ligne contenant les effectifs cumulés croissants.
b) Déterminer la médiane de cette série, ainsi que les quartiles Q_1 et Q_3.
c) Calculer la note moyenne $\bar{x}$, arrondie au centième.
d) A l'aide d'une calculatrice, calculer l'écart-type σ de la série.
e) Déterminer la proportion (exprimée en pourcentage) des notes situées dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma\ ; \bar{x} + \sigma]$.

58. Les cafés sont vendus en paquets de 250g. En réalité, voici les poids exacts relevés sur 100 paquets :

Poids (en g)	[236 ; 240[	[240 ; 244[	[244 ; 248[	[248 ;252[	[252 ; 256[	[256 ; 260[
Nombre de paquets	3	6	20	36	26	9

a) A l'aide d'une calculatrice, calculer le poids moyen $\overline{x}$ d'un paquet de café et l'écart-type σ de la série.
b) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants ; en déduire la médiane M_e de cette série.

59. A chaque lancer d'une pièce, le résultat est soit P (pile), soit F (face).
Une expérience consiste à lancer trois fois de suite une pièce : l'issue est un triplet.
Par exemple, PPF signifie : obtenir pile au premier lancer, pile au second lancer et face au troisième lancer.
a) Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles à l'aide d'un arbre.
b) A est l'événement « pile est apparu plus souvent que face ». Ecrire l'événement A sous forme d'ensemble.
c) B est l'événement « pile est apparu au second lancer ». Ecrire sous forme d'ensemble l'événement B, puis l'événement A∩B.

60. On dispose d'un dé cubique pipé. La loi de probabilité correspondant au lancer de ce dé est donnée par le tableau ci-dessous, où p est un réel de l'intervalle [0 ; 1] :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	p	p	2p	3p	p	4p

Déterminer p, puis en déduire la probabilité d'obtenir un résultat impair en lançant ce dé.

61. Soit A et B deux événements d'un univers muni d'une loi de probabilité p, tels que :
$$p(A) = 0{,}3\ ; \quad p(B) = 0{,}5 \quad \text{et} \quad p(A \cap B) = 0{,}1.$$
Calculer $p(A \cup B)$, $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

62. Dans une classe de 35 élèves de Seconde, 18 élèves jouent au foot, 15 font du judo, 5 pratiquent les deux sports.
On interroge un élève au hasard parmi les 35 élèves de la classe.
On note F l'événement « l'élève interrogé joue au foot » et J l'événement « l'élève interrogé fait du judo ».
a) Décrire par une phrase les événements $F \cap J$, $F \cup J$, $\overline{F}$et $\overline{F \cup J}$.
b) En s'aidant d'un diagramme de Venn, indiquer combien d'issues réalisent chacun des événements précédents.

63. Une étudiante fabrique chaque semaine un petit stock de bijoux fantaisie qu'elle vend en fin de semaine afin de s'assurer quelques revenus.
Sa production hebdomadaire se répartit ainsi : 20% de boucles d'oreilles, 40% de colliers et 40% de bracelets.
Chaque bijou est réalisé soit en métal argenté, soit en métal doré. 60% des bijoux fabriqués sont argentés.
Elle fabrique autant de colliers dorés que de colliers argentés. Par ailleurs, 75% des bracelets sont argentés.

a) Reproduire et compléter le tableau de fréquences (en %) par rapport à l'ensemble de la production :

	Colliers	Bracelets	Boucles d'oreille	TOTAL
Argentés				60
Dorés				
TOTAL			20	100

b) Pour se rendre sur le lieu de vente, elle range en général sa production en vrac dans une mallette. Elle prend au hasard un bijou dans la mallette. On suppose que tous les choix possibles sont équiprobables.
- Calculer les probabilités des événements suivants :
  A : « le bijou pris est argenté » ; B : « le bijou pris est un bracelet ».
- Décrire par une phrase l'événement A∩B et calculer sa probabilité.
- Décrire par une phrase l'événement AUB et calculer sa probabilité.
- Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

c) Il lui arrive parfois de ranger séparément les bijoux argentés et les bijoux dorés. C'est le cas cette fois-ci. Elle prend, toujours au hasard, un objet dans la mallette contenant les bijoux dorés.
- Quelle est la probabilité que le bijou pris soit un bracelet ?
- Quelle est la probabilité que le bijou pris ne soit pas un collier ?

64. ***Marche aléatoire***

Une puce se déplace sur un axe gradué. A chaque pas, et de façon aléatoire, elle avance ou recule d'une unité. Elle part de l'origine O et effectue quatre sauts.

a) Quelles sont les abscisses finales possibles de la puce ?

b) Construire un arbre décrivant tous les sauts possibles de la puce, puis calculer la probabilité de chaque abscisse finale possible.

c) On propose l'algorithme suivant pour simuler le premier saut de la puce :

```
from random import*

def position_puce():
    x = 0
    n = randint(0,1)
    if n == 0:
        x = x - 1
    else:
        x = x+1
    return("l'abscisse après le 1er saut est : ",x)
```

Expliquer cet algorithme, puis le modifier de façon à simuler n sauts.

→ *Définir la fonction modifiée* `position_puce(n):` *puis utiliser une boucle itérative...*

d) Programmer l'algorithme ainsi obtenu sur Python et le tester pour $n = 4$ puis pour diverses autres valeurs de n.

65. Une grande marque de vêtements de luxe souhaite changer son logo. Son PDG organise une enquête auprès de ses plus fidèles clients.
Sur 2 000 clients interrogés, 456 sont favorables à ce changement.

a) Déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95 %.

b) Est-ce que cette grande marque a intérêt à changer de logo ?

RAPPEL

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE

• Si l'on considère un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25 et si la fréquence observée f appartient à l'intervalle $[0{,}2\,;0{,}8]$ alors, dans plus de 95 % des cas, la probabilité p appartient à l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
On appelle cet intervalle **l'intervalle de confiance de p au seuil de 95** %.

• Cet intervalle permet d'estimer une probabilité à partir d'expériences menées sur un échantillon de la population.

• La borne de gauche de cet intervalle est arrondie par défaut et celle de droite est arrondie par excès.

66. Pour une chaîne de production qui fabrique des flacons de parfum, il est considéré comme acceptable que 20 % des flacons présentent des imperfections sans gravité.
Sur un échantillon de 150 flacons, 63 présentent des imperfections.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

b) Au vu de cet échantillon, faut-il envisager de réviser la chaîne de production ?

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE

• Si l'on considère un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25 et si la probabilité p appartient à l'intervalle $[0{,}2\,;0{,}8]$ alors, dans plus de 95 % des échantillons, la fréquence observée f appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. On appelle cet intervalle **l'intervalle de fluctuation de f au seuil de 95 %.**

• L'intervalle de fluctuation a pour but de valider un échantillon et donc de prendre des décisions.

• Pour arrondir les bornes de l'intervalle de fluctuation, on prend la valeur approchée par défaut de la borne de gauche et par excès celle de la borne de droite.

Partie IV - TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 2	(chap.4) :	Vecteurs
Itinéraire 6	(chap.5) :	Problèmes de géométrie
Itinéraire 8	(chap.6) :	Droites du plan

67. On considère un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$ dont l'unité est le centimètre.
a) Placer les points $A(1\,;2)$, $B(-2\,;1)$ et $C(-3\,;-2)$.
b) Calculer les distances AB et BC.
c) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
d) Construire le point D, image de A par la translation qui transforme B en C.
e) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

68. Dans un repère orthonormé$(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$, on donne les points $A(2\,;4)$, $B(2\,;-6)$ et $C(-4\,;-1)$.
a) Placer les points A, B et C.
b) Calculer les coordonnées du point D vérifiant $2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.
c) Calculer les coordonnées du point E vérifiant $3\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

69. On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$.
Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Dans l'affirmative, déterminer le réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
a) $c\begin{pmatrix}1/3\\3/4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$;
b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2/7\\4/3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3/7\\2\end{pmatrix}$;
c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\sqrt{5}\end{pmatrix}$;
d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

70. On se place dans un repère $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$. Déterminer dans chaque cas, si les droites (AB) et (CD) sont parallèles :
a) $A(0\,;1)$, $B(2\,;5)$, $C(-1\,;4)$ et $D(5\,;15)$.
b) $A(0\,;\ 1)$, $B(-1\,;\ 4)$, $C(4\,;\ 6)$ et $D(7\,;\ 5)$.
c) $A(12\,354\,;1\,205)$, $B(12\,478\,;1\,577)$, $C(0\,;1)$ et $D(450\,;1\,351)$.

71. On se place dans un repère $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$. Déterminer dans chaque cas, si les points A, B et C sont alignés :
a) $A(0\,;1)$, $B(2\,;\ 4)$, et $C(4\,;7)$.
b) $A(2\,;3)$, $B(1\,;4)$, et $C(-3\,;8)$.
c) $A(0\,;1)$, $B(2\,;4)$, et $C(10\,;27)$.

72. On se place dans un repère $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$, et on considère les points $A(-2\,;-3)$, $B(-6\,;5)$ et $C(2\,;1)$.
On fera une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
a) On considère les points D, E et F définis par : $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
- Que peut-on dire des droites (CF) et (AB) ?
- Déterminer les coordonnées des points D, E et F.

b) Montrer que les droites (DE) et (AC) sont parallèles.
c) Montrer que les points D, E et F sont alignés.

73. ***Test d'alignement***
On se place dans un repère et on considère 3 points A, B et C.
En utilisant un argument vectoriel, écrire un algorithme dont l'objectif est d'automatiser les calculs permettant d'affirmer que les points A, B et C sont alignés ou non.

74. Test de colinéarité

```
a = float(input("entrer l'abscisse du vecteur u"))
b = float(input("entrer l'ordonnée du vecteur u"))
c = float(input("entrer l'abscisse du vecteur v"))
d = float(input("entrer l'ordonnée du vecteur v"))
k1 = a / c
k2 = b / d
if k1 == k2 :
    print ("vect(u) = k * vect(v), avec k = ",k1)
else :
    print ("vect(u) et vect(v) non colineaires")
```

On donne l'algorithme suivant :

a) Tester l'algorithme ci-dessus avec les couples $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants :
  * $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{3}{6}$;
  * $\vec{u}\binom{3}{-5}$ et $\vec{v}\binom{5}{-8}$; * $\vec{u}\binom{1}{0}$ et $\vec{v}\binom{3}{0}$. Que peut-on penser des réponses affichées ?

b) Justifier que les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{0}$ et $\vec{v}\binom{3}{0}$ sont colinéaires.

c) Proposer une modification de l'algorithme qui permette d'obtenir une réponse correcte dans ce dernier cas.

75. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1\,;5)$, $B(-2\,;-1)$, $C(7\,;-1)$ et $H(1\,;2)$.
a) Déterminer les coordonnées des points D et E tels que $ABDC$ et $ACBE$ soient des parallélogrammes.
b) Montrer que le triangle HBE est rectangle en B.
c) Montrer que la droite (HB) est la médiatrice du segment $[ED]$. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

76. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-2\,;0)$, $B(-1\,;3)$ et $C(4\,;-2)$.
a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
b) Soit (C) son cercle circonscrit. On appelle K son centre. Déterminer les coordonnées de K et le rayon de (C).
c) Préciser la position des points $D(4\,;3)$ et $F(3{,}5\,;3{,}5)$ par rapport à (C).
d) Démontrer que la droite (DF) est tangente à (C).

77. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(-2\,;-1)$, $B(4\,;3)$ et $C(0\,;6)$.
a) Ecrire une équation cartésienne de la droite (AB), puis de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
b) Déterminer alors les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur (AB).

78. Le plan étant muni d'un repère, déterminer les coordonnées des points A, B et C sachant que :
  * (AC) passe par le point $H(-5\,;2)$ et admet $m=\frac{1}{3}$ pour coefficient directeur ;
  * (AB) a pour équation $y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$; * (CB) est parallèle à (OA) ; * B a pour ordonnée 1.

79. Soit (Δ) une droite d'équation $3x-2y+1=0$.
a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (Δ).
b) Ecrire une équation de la droite (d) parallèle à (Δ) et passant par le point $A(2\,;-1)$.
c) Déterminer x et y pour que les points $B(x\,;\,x)$ et $C(1\,;\,y)$ soient sur la droite (Δ).
d) Calculer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme $ACBD$.

80. Le plan P est rapporté à un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$. A tout point $M(x,y)$ on associe le réel $3x+2y$.
On dit que ce réel est l'image du point M.
a) Quelle est l'image du point O ? du point $A(-2;1)$? du point $B(0;-2)$?
b) Quels sont les points M qui ont la même image que le point O ?
c) Construire l'ensemble des points M qui ont pour image le réel (-4).

81. On donne un cercle de diamètre $[BC]$ et un point A extérieur au cercle ; (AB) et (AC) recoupent le cercle en P et Q respectivement ; (BQ) et (CP) se coupent en M. Démontrer que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.

82. ABC est un triangle rectangle en A; D est le pied de la hauteur issue de A. On désigne par I le milieu de $[BD]$ et par J celui de $[AD]$. Démontrer que les droites (AI) et (CJ) sont perpendiculaires.

83. $ABCD$ est un carré ; I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$; (IJ) coupe (AD) en K.
Montrer que : a) $AKBJ$ est un parallélogramme.
b) $(KJ)\perp(BD)$.
c) $(DI)\perp(AJ)$.

84. (C) est un cercle de diamètre $[BC]$; A est un point de (BC) distinct de B et de C ; (D) est la perpendiculaire en A à (BC). Soit M un point de (C) distinct de B et C ; (BM) et (CM) coupent (D) en I et J respectivement.
Montrer que les droites (IC) et (BJ) sont perpendiculaires et qu'elles se coupent en un point de (C).

85. ABC est un triangle ayant les trois angles aigus ; H est l'orthocentre du triangle ; A', B' et C' les pieds des hauteurs. On se propose de démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$.
a) Montrer que les points A', H, B', C sont cocycliques; de même pour les points A', H, C', B.
b) Comparer les angles $\widehat{HA'B'}$ et $\widehat{HCB'}$; puis les angles $\widehat{HA'C'}$ et $\widehat{HBC'}$.
c) Comparer les angles $\widehat{ABB'}$ et $\widehat{ACC'}$. Prouver alors que (HA') est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{B'A'C'}$ du triangle $A'B'C'$ et conclure. *(On dit que A'B'C' est le **triangle orthique** du triangle ABC)*

86. (d) et (d') sont deux droites parallèles ; A et A' deux points n'appartenant pas à ces droites. A tout point M de (d) on fait correspondre le point M' de (d') tel que les droites (MA') et (AM') soient parallèles.
Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe situé sur (AA').

87. (C) et (C') sont deux cercles de centres O et O' , et de rayons R et R', tangents en A.
A tout point M de (C), non situé sur (OO'), on associe le point M' de (C') tel que le triangle MAM' soit rectangle en A. Démontrer que la droite (MM') passe par un point fixe.

88. On construit extérieurement à un triangle ABC le carré $BCDE$. La perpendiculaire issue de D à la droite (AB) et la perpendiculaire issue de E à la droite (AC) se coupent en I.
On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et par J l'image de I par t.
a) Déterminer les images par t des droites (DI) et (EI). En déduire que les droites (BJ) et (AC) sont perpendiculaires. Que représente J pour le triangle ABC?
b) Montrer que les points A, J et I sont alignés.

89. a) Tracer un triangle isocèle ABC de sommet principal B tel que : $AC = 4\ cm$ et $AB = 5\ cm$.
b) Placer les points R et M tels que : $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.
c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABRC$? Justifier.
d) Préciser la nature du quadrilatère $ABCM$. Justifier.
e) Démontrer que le point C est le milieu du segment $[MR]$.

90. Soit un quadrilatère $MONP$.
a) Simplifier les sommes : * $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}$; * $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM}$; * $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}$.
b) Etablir la relation : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{MO} = \vec{0}$.
c) On suppose de plus, que pour tout point A du plan, on a : : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.
Montrer que : $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $MONP$?

91. Soit un parallélogramme $EFGH$ et I le milieu de $[EF]$. Faire une figure.
a) On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$. Quelle est l'image de E ? Quelle est l'image de F ? Justifier.
b) Construire le point J, image du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{EH}$. Que représente le point J pour le segment $[GH]$? Justifier la réponse.
c) Construire le point K tel que : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EH}$. Montrer que J est le milieu du segment $[EK]$.

92. $ABCD$ est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$.
a) Placer les points J et K tels que : $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
b) Démontrer que : $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI}$.
c) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire que les points I, J et K sont alignés.

==